数理解析研究所講究録
246巻 1975年 30-38

G多様体上のG不変ベクトル場の存在について

山口大 文理　小宮克弘

§1. 本論の目的

closed G-manifold の上に G-invariant で各点で 0 ではない vector field が存在するための必要十分条件を求める。

§2. 必要な定義

smooth な manifold M に対して，その tangent bundle を $\tau(M)$, tangent sphere bundle を $S(\tau(M))$ で表わす。

G を compact Lie group とし，M を (smooth な) G-manifold とする。$\tau(M)$ の G-equivariant な (連続な) cross section $s : M \to \tau(M)$ を G-cross section という。G-cross section s で，各 $x \in M$ に対し，$s(x) \neq 0$ であるものを M の non-singular G-vector field という。さらに，各点で一次独立な

k個の G-cross section を G-k-field という。

$x \in M$ に対し，その isotropy group を G_x で表わす。G の closed subgroup H に対して，

$$M_H = \{ x \in M \mid G_x = H \}$$

とする。これは M の submanifold である。ただし，M が compact であっても，M_H は compact とは限らない。H の G における normalizer を $N(H)$ で表わすとき，M_H は $N(H)$-manifold であり，さらに，free $N(H)/H$-manifold である。

位相空間 X に対し，X の各 connected component の Euler 標数の絶対値の和を $|\chi|(X)$ で表わす。

§3. 得られた結果

定理 1.

M を compact G-manifold とし，$s : \partial M \to S(\tau(\partial M))$ を $S(\tau(\partial M))$ の G-cross section とする。このとき，s が $S(\tau(M))$ の G-cross section に拡張されるための必要十分条件は，各 $x \in M$ に対して，

$$|\chi|(M_{G_x} / N(G_x)) = 0$$

又は，$\dim N(G_x) - \dim G_x > 0$

となることである。

この定理より，本論の目的である次の結果が得られる：

系 2.

closed G-manifold M が non-singular G-vector field をもつための必要十分条件は，各 $x \in M$ に対して，

$$|\chi|(M_{G_x}/N(G_x)) = 0$$

又は，

$$\dim N(G_x) - \dim G_x > 0$$

となることである。

さらに，副産物として，次の結果も得られた：

定理 3

M を compact G-manifold とし，A をその closed で G-invariant な submanifold とする。$E \to M$ を $\tau(M)$ の G-invariant な subvector bundle とし，$s : A \to S(E)|A$ を $S(E)|A$ の G-cross section とする。このとき，各 $x \in M - A$ に対して，

$$\dim N(G_x) - \dim G_x \geqq \dim \tau(M) - \dim E$$

ならば，s は $S(E)$ の G-cross section に拡張される。

この定理より，次の系が得られる：

系4

> M を compact G-manifold とし，F を stationary point set とする。各 $x \in M-F$ に対して，
>
> $$\dim N(G_x) - \dim G_x \geqq k > 0$$
>
> のとき，M が G-k-field をもつための必要十分条件は，F が k-field をもつことである。

［注意］ 連続な G-cross section を smooth な G-cross section で近似することが可能である。従って，連続な G-vector field が存在すれば，必然的に，smooth な G-vector field が存在する。

§4. 定理1の証明

(I). 十分条件であることの証明

isotropy type が等しい部分（の周辺）ごとに cross section を構成し，それをつなぎあわせて M 上の cross section を得る。

くわしくは，M 上に現われる isotropy type の個数 k に関する帰納法による。

先ず，$k=1$ のとき。(H) をその只一つの isotropy type とする。このとき，M_H は compact $N(H)$-manifold

である。次の diagram を考えよ:

$$
\begin{tikzcd}
S(\tau(M_H)) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, shift left] & S(\tau(M_H))/N(H) \arrow[d, shift right] & \\
M_H \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift left, "\pi^* s_2"] & M_H/N(H) \arrow[u, dashed, shift right, "s_2"'] \arrow[r, phantom, "\supset"] & \partial M_H/N(H) \arrow[ul, dashed, "s_1"'] \arrow[d, equal] \\
& & \partial(M_H/N(H))
\end{tikzcd}
$$

ここに, π は canonical な projection である。

定理の仮定で与えられた G-cross section s は, bundle $S(\tau(M_H))/N(H)$ の $\partial M_H/N(H)$ 上での cross section を induce する。それを s_1 で表わそう。このとき, この s_1 は $M_H/N(H)$ 上の cross section s_2 に拡張される。何故ならば,

(i) $\dim N(H) - \dim H > 0$ のとき: $S(\tau(M_H))/N(H)$ の fibre の connectivity と base space $M_H/N(H)$ の cell complex としての次元を比較することにより, s_1 が s_2 に拡張されることがわかる。

(ii) $\dim N(H) - \dim H = 0$ のとき: このとき, $S(\tau(M_H))/N(H) \cong S(\tau(M_H/N(H)))$ である。さらに, s_1 の image は $M_H/N(H)$ の boundary に接している。さらに, また, 仮定より, $|\chi|(M_H/N(H)) = 0$ である。従って, (例えば, U. Koschorke; Concordance and bordism of line fields, Inventiones math. 24 (1974), によって), s_1 が s_2 に拡張されることがわかる。

さらに, s_2 は, π によって, $S(\tau(M_H))$ の $N(H)$-cross section $\pi^* s_2$ を induce する。

G-bundle isomorphism

$$\begin{array}{ccc} S(\tau(M)) & \cong & G \times_{N(H)} (S(\tau(M))|M_H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \approx & G \times_{N(H)} M_H \end{array}$$

が存在する。また, $S(\tau(M_H))$ は $S(\tau(M))|M_H$ の subbundle である。このことより, $\pi^* s_2$ より $S(\tau(M))$ の G-cross section $s_3 : M \to S(\tau(M))$ が induce される。 $s_3|\partial M = s$ である。

次に, isotropy type の個数が k-1 のとき十分条件であることが示されたとして, isotropy type の個数が k のときを考える。

(H) を M 上の極大な isotropy type とする。M_H は compact $N(H)$-manifold である。

$$M_{(H)} = \{ x \in M \mid (G_x) = (H) \}$$

とする。 $k=1$ のときと同様にして, $S(\tau(M))|M_{(H)}$ の G-cross section $t_1 : M_{(H)} \to S(\tau(M))|M_{(H)}$ で $t_1|\partial M_{(H)} = s|\partial M_{(H)}$, $t_1(M_{(H)}) = S(\tau(M_{(H)}))$ なるものが存在する。

$T(M_{(H)})$ を $M_{(H)}$ の M における closed G-invariant tubular neighborhood とする。 normal vector の方向に t_1 を平行移動することによって, $S(\tau(M))|T(M_{(H)})$ の G-cross section $t_2 : T(M_{(H)}) \to S(\tau(M))|T(M_{(H)})$ で $t_2|M_{(H)} = t_1$, (従って, $t_2|\partial M_{(H)} = s|\partial M_{(H)}$), なるものが構成される。

$L = \partial M \cup T(M_{(H)})$ とおく。 t_2 と s より, $S(\tau(M))|L$ の G-cross section を構成したい。今, $t_2|\partial M_{(H)} = s|\partial M_{(H)}$ ではあるが, 悲しいかな $A = \partial M \cap T(M_{(H)})$ 上で t_2 と s が一致しているとは限らない。しかし, 幸いにして, A は $\partial M_{(H)}$ に equivariantly deformable であるから, $t_2|A \simeq s|A$ である。さらに, $T(M_{(H)})$ における A の invariant neighborhood として, $A \times [0,1]$ なる形のものがとれる。これらのことより, $S(\tau(M))|L$ の G-cross section $t_3 : L \to S(\tau(M))|L$ で $t_3|\partial M = s$ なるものを

構成することができる。

次に，$L_1 = M - \mathring{T}(M_{(H)})$ とする。ここに，$\mathring{T}(M_{(H)})$ は tubular neighborhood の open disc bundle に相当する部分である。このとき，~~###~~，L_1 は角のある compact G-manifold で $M = L \cup L_1$，~~###~~ $\partial L_1 = L \cap L_1$ である。従って，$S(\tau(M))|L_1$ には ∂L_1 上に t_3 より G-cross section が induce される。さらに，L_1 の isotropy type の個数は $k-1$ である。L_1 の角を丸めて smooth な G-manifold にすれば，帰納法の仮定より，$S(\tau(M))|L_1$ の G-cross section $t_4 : L_1 \to S(\tau(M))|L_1$ で $t_4|\partial L_1 = t_3|\partial L_1$ なるものが存在することがわかる。t_3 と t_4 より，$S(\tau(M))$ の G-cross section $t_5 : M \to S(\tau(M))$ で $t_5|\partial M = s$ なるものが得られる。

(II) 必要条件であることの証明：

$x \in M$ に対し，$\dim N(G_x) - \dim G_x = 0$ ならば $|\chi|(M_{G_x}/N(G_x)) = 0$ であることを示せばよい。

今，(H) を M 上の極大な isotropy type とする。M_H は compact $N(H)$-manifold である。次の diagram を考えよ：

$$
\begin{tikzcd}
S(\tau(M_H)) \arrow[r] \arrow[d] & S(\tau(M_H))/N(H) \arrow[d, shift right] \\
M_H \arrow[r] & M_H/N(H) \arrow[u, dashed, shift right, "s'"']
\end{tikzcd}
$$

定理の仮定で与えられた $S(\tau(M))$ の G-cross section は $S(\tau(M_H))$ の $N(H)$-cross section を induce し、それは $S(\tau(M_H))/N(H)$ の cross section を induce する。それを s' とする。$\dim N(H) - \dim H = 0$ ならば $S(\tau(M_H))/N(H) \cong S(\tau(M_H/N(H)))$ で、$M_H/N(H)$ の boundary 上での s' の image はそれに接していることがわかる。すなわち、$M_H/N(H)$ は、boundary 上ではそれに接した、non-singular vector field をもつことがわかる。よって、$|\chi|(M_H/N(H)) = 0$ である。

このことを帰納法の出発点として、他の M_{G_x} に対しても同様のことが証明される。

【附記】くわしい証明は、いずれ、どこかの雑誌に発表されるであろう。